数理解析研究所講究録
191巻 1973年 67-76

重積分の近似計算について

名工大 数学教室 江田 義計

§1.

単位立方体 $U_s = \{X = (x_1, \cdots, x_s), 0 \leqq x_i \leqq 1 \quad (1 \leqq i \leqq s)\}$ として，U_s の点 $A = (a_1, \cdots, a_s)$ を任意に与えても，U_s の点列 $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, \cdots, x_s^{(k)})$ $(k=1, 2, \cdots)$ についていつも

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n} N_n(A) - a_1 \cdots a_s \right| = \lim_{n\to\infty} D_{s,n}(A) = 0 \qquad (1)$$

であるならば，点列 $\{X^{(k)}\}$ は U_s 上で一様分布をなすという。ここで $N_n(A) = \#\{X^{(k)}, (1 \leqq k \leqq n, \ x_i^{(k)} < a_i \ (1 \leqq i \leqq s)\}$ であり，$\sup_A D_{s,n}(A)$ を $\{X^{(k)} (1 \leqq k \leqq n)\}$ の DISCREPANCY という。$\{X^{(k)}\}$ が U_s 上一様分布をなすための必要十分条件は U_s 上の任意の R－可積分関数 $f(x)$ としたとき

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_{U_s} f(x)\,dX - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X^{(k)}) \right| = \lim I_{s,n}(f(X^{(k)})) = 0 \quad (2)$$

となることである。これは H. WEYL による美しい結果であるが (1) は点列 $\{X^{(k)}\}$ の U_s での均衡性を示すとも見れるし，

(2) は積分に対する近似計算を与えると見てもよい。

先ず均衡性について次の J.H. Halton (1960) の結果をあげよう：

自然数 $k \leqq n$, $r > 1$ とし k の r 進法表示を

$k = k_0 + k_1 r + \cdots + k_M r^M$ $(0 \leqq k_j < r \ (1 \leqq j \leqq M))$ とし，

その係数を用いて次の小数 $\varphi_r(k) = k_0/r + k_1/r^2 + \cdots + k_M/r^{M+1}$

$(M = [\log n / \log r])$ を作る。p_i は i 番目の素数とし $\{p_1, \cdots, p_s\}$ を指定し $Y_0^{(k)} = (\varphi_{p_1}(k), \cdots, \varphi_{p_s}(k))$ $(k = 1, 2, \cdots)$，

$(p_s < n)$ とおく，このとき

$$\sup_A D_{s,n} \leqq 2^s \cdot \left(\prod_{i=1}^{s} p_i / \log p_i \right) \frac{\log^s n}{n},$$

また $Z_0^{(k)} = (k/n, \varphi_{p_1}(k), \cdots, \varphi_{p_{s-1}}(k))$ $(k = 1, 2, \cdots)$ $(p_{s-1} < n)$ とすると

$$\sup_A D_{s,n} \leqq 2^{s-1} \left(\prod_{i=1}^{s-1} p_i / \log p_i \right) \frac{\log^{s-1} n}{n}。$$

§2

一様分布の均衡性と積分の近似計算におよぼす関係について一つの結果（H. M. Совол, 1961）をのべる：

整数 $\alpha \geqq 1$ とし，U_s 上で定義される関数 $f(X)$ について

$$\left| \partial^r f(X) / \partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_s^{i_s} \right| < C, \quad \left(\begin{array}{l} r \leqq \alpha s, \ 0 \leqq i_j \leqq \alpha \ (1 \leqq j \leqq s) \\ i_1 + \cdots + i_s = r \end{array} \right.$$

を満足する関数全体からなる族を $H_s^{\alpha}(C)$ とおく。U_s の点列 $X^{(k)}$ ($k=1,2,\cdots$) に対し，もし

$$\sup_A D_{s,n}(A) < \varphi(n)$$

であれば

$$\sup_{f\in H_s^1(C)} I_{s,n}(f(X^{(k)})) \leqq 2^s C\cdot\varphi(n)$$

このことは，もし数値積分のよいものを得ようとすれば均衡度のよい数列を求めなければならないことが分る。上の結果と HALTON の結果とを合わせると：

$$\sup_{f\in H_s^1(C)} I_{s,n}(f(Y_0^{(k)})) \leqq 4^s\cdot C\cdot\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{p_i}{\log p_i}\right)\frac{\log^s n}{n},$$

$$\sup_{f\in H_s^1(C)} I_{s,n}(f(Z_0^{(k)})) \leqq 2^{2s-1}\, C\cdot\prod_{i=1}^{s-1}\left(\frac{p_i}{\log p_i}\right)\frac{\log^{s-1} n}{n}.$$

なお，$D_{s,n}(A)$ の下からの評価に対しては §4 で与える。

§3

$f(X)$ は各成分について周期 1 をもつとしそのフーリエ級数は $|\text{conv}|$（絶対収束）するとし

$$f(X)=\sum_{M=-\infty}^{\infty} c(M)\,e^{2\pi i(M,X)} \qquad \left(\begin{array}{l} M=(m_1,\cdots,m_s),\quad m_i\in Z \\ (M,X)=\text{内積}\end{array}\right.$$

$\alpha>1$，$C>0$ を定数として

$$|C(M)| \leq C \Big/ (\overline{m}_1 \cdots \overline{m}_s)^{\alpha}, \qquad \overline{m} = \mathrm{Max}(1, |m|)$$

を満足するとき $f(X)$ の作る函数族を $E_s^{\alpha}(C)$ とおく。q と a_i $(1 \leq i \leq s)$ は整数とし，$\frac{k}{q}A = (\frac{k}{q}a_1, \cdots, \frac{k}{q}a_s)$ $(k=1,2,\cdots)$ とおくと，$f(X) \in E_s^{\alpha}(C)$ に対し

$$\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q} f\left(\frac{k}{q}A\right) = \sum_{M=-\infty}^{\infty} C(M) \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{q} e^{2\pi i (A,M)\frac{k}{q}}$$

$$= \sum_{\substack{M=-\infty \\ (A,M)\equiv 0\,(q)}}^{\infty} C(M)$$

を得る，かくて

$$\int_{U_s} f(X)\,dX - \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q} f\left(\frac{k}{q}A\right) = -\sum_{(A,M)\equiv 0\,(q)}{}_{0}' \, C(M)$$

かくて左辺の重積分を単一の和で近似する問題は $\frac{k}{q}A$ をうまくとって，つまり $A=(a_1, \cdots, a_s)$ をうまくとって上式の右辺の絶対値を最小にすることにある。所で $f \in E_s^{\alpha}(C)$ より

$$\Bigg|\sum_{(A,M)\equiv 0\,(q)}{}_{0}' \, C(M)\Bigg| \leq C \sum_{(A,M)\equiv 0\,(q)}{}_{1}' \frac{1}{(\overline{m}_1 \cdots \overline{m}_s)^{\alpha}} = C\Omega$$

とおく。

H.M. Коробов (1957) によると $\Omega < (2s)^{\alpha}\left(2\zeta\left(1+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)+1\right)^{\alpha s} p^{-\alpha+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ となるような $A_0 = (1, a, \cdots, a^{s-1})$ が存在する。つまり奇素数 $p > s$ に対し $0 < \varepsilon < \alpha - 1$ なる ε に対して次式を満足するような A_0 が存在するのである：

$$\sup_{f\in E_s^\alpha(C)} I_{s,p}\left(f\left(\frac{k}{p}A_0\right)\right) < C(2s)^\alpha\left(2\zeta\left(1+\frac{\epsilon}{\alpha}\right)+1\right)^{\alpha s}p^{-\alpha+\epsilon}$$

となる A_0 が存在する。実は一般に

$$\Lambda_\alpha = \sum_{\substack{(A,M)\equiv 0(q)\\ |m_i|\leqq q/2}}' \frac{1}{(\overline{m}_1\cdots\overline{m}_s)^\alpha},$$

とおくと

$$I_{s,q}\left(f\left(\frac{k}{q}A\right)\right) \leqq C\left[\Lambda_\alpha + s\left(\frac{2}{q}\right)^\alpha\left(2\zeta(\alpha)+1\right)^s\right]$$

を得る。$\Lambda_\alpha^{1/\alpha} \leqq \Lambda_1$ であり

$$\Lambda_1(a)=\Lambda_1(A_0) = \sum_{\substack{(A,M)\equiv 0(p)\\ |m_i|\leqq p/2}}' \frac{1}{(\overline{m}_1\cdots\overline{m}_s)}, \quad A_0=(1,a,\ldots,a^{s-1})$$

とおくと $\Lambda_1(a)$ の最小なものが望ましい $(1\leqq a\leqq p-1)$。

$$\Lambda_1(a) \leqq \left\{(s-1)2^{s+1}\log^s 3p\right\}\frac{1}{p}$$

となるので $p>s$ ならば（p 素数）

$$\sup_{f\in E_s^\alpha(C)} I_{s,p}\left(f\left(\frac{k}{p}A_0\right)\right) < C\left[(s-1)^\alpha 2^{(s+1)\alpha}\log^{\alpha s}3p + s2^\alpha\left(2\zeta(\alpha)+1\right)^s\right]\frac{1}{p^\alpha}$$

となる a $(p\nmid a)$ が存在する（Н.М. Коробов, 1959）。ここで次の定義をしよう：

$q\geqq 3$ とし，c, c' は α, s のみに関係する定数として

$$\sup_{f\in E_s^\alpha(C)} I_{s,q}\left(f\left(\frac{k}{q}A\right)\right) < C\cdot c(\alpha,s)\frac{\log^{c'(\alpha,s)}q}{q^\alpha}$$

となる $A=(a_1,a_2,\ldots,a_s)$ を mod q の最良係数（極値係数）

(OPTIMAL COEFFICIENT) という。王元 (1962) はこのAの存在の別証明を次の形で与えている。奇素数 $p>s$ のとき

$$\sup_{f\in E_s^\alpha(C)} I_{s.p}\left(f\left(\tfrac{k}{p}A_0\right)\right) < C\ (2s)^\alpha 3^{\alpha s}(s\zeta(\alpha))^s \frac{\log^{\alpha(s-1)} 3p}{p^\alpha}.$$

そしてH. C. Бахвалов (1959) の興味ある結果をあげてこの§を終える：

整数 $m>1$ とし合同式（ヂオファンタス方程式）

$$(A,M)\equiv 0 \pmod m,\quad A=(a_1,\cdots,a_s),\ M=(m_1,\cdots,m_s)$$

が $\overline{m}_1\cdots\overline{m}_s<m$，$A\neq 0$ なる範囲で解がなければ

$$\sup_{f\in E_s^\alpha(C)} I_{s.n}\left(f\left(\tfrac{k}{n}A\right)\right) < C\cdot c(\alpha.s)\frac{\log^{s-1} m}{m^\alpha}$$

である。

§4

$$D_{s.n}(A)=\left|N_n(A)/n-a_1\cdots a_s\right|,\quad A=(a_1,\cdots,a_s)$$

の下からの評価に対しては，任意の点列 $X^{(k)}$ $(k=1,2,\cdots)$ に対して K. F. Roth の周知の定理が得られている (1950)：

$$D_{s,n}(A) \geqq 2^{-2s-4}(s-1)^{\frac{1-s}{2}}(\log 2)^{\frac{1-s}{2}}\frac{\log^{\frac{s-1}{2}} n}{n}$$

となる $A\in U_s$ が存在する。

qを正整数とし，$0\leqq\lambda<1$ およびCを正の定数とする。

U_s 上で定義される関数 $f(X)$ で q 階を超えないすべての微係数はすべて連続，またその絶対値は C をこえずとし $f(X)$ の q 階微係数については

$$\lim_{y_\nu \to x_\nu} \frac{1}{|y_\nu - x_\nu|^\lambda} \left| \frac{\partial^q f(x_1 \cdots y_\nu \cdots x_s)}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial y_\nu^{i_\nu} \cdots \partial x_s^{i_s}} - \frac{\partial^q f(x_1 \cdots x_s)}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_s^{i_s}} \right| \leqq C$$

$(1 \leqq \nu \leqq s,\ i_j \geqq 0\ (1 \leqq j \leqq s),\ i_1 + \cdots + i_s = q)$ であるとし，このような $f(X)$ 全体の作る関数族 $H_s(q, \lambda, C)$ とする。$H_s(q, \lambda, C) \subset H_s^\alpha(C)$ である。このとき U_s の任意の点列 $X^{(k)}$ $(k=1,2,\cdots)$ に対して

$$I_{s,n}(f(X^{(k)})) \geqq C \cdot c(q, \lambda, s)\, n^{-\frac{q+\lambda}{s}}$$

となるような $f(X) \in H_s(q, \lambda, C)$ が存在する。従って $H_s^\alpha(C)$ に対しては n 個の関数値の算術平均と U_s 上の積分値との誤差は $1/n^\alpha$ よりよく出来ることで §2 末の定理等は本質的にはよくはならない。(Н. С. Бахвалов, 1959)。

更に次の И. Ф. Шарыгин (1963) の定理がある：

U_s の任意の n 個の点 $X^{(k)}$ $(k=1, \cdots, n)$ に対して $f(X^{(k)})=0$ $(k=1, \cdots, n)$ で

$$\int_{U_s} f(X)\, dX \geqq C \cdot c(\alpha, s) \frac{\log^{s-1} n}{n^\alpha}$$

となる $f(X) \in E_s^\alpha(C)$ が存在する。これによって見れば §2 の Коробов の結果は誤差の主項とも見れる $p^{-\alpha}$ は最善であった。

§5

最後に華羅(华罗)庚，王元の代数的単数を利用する方法についてのべよう。二次体 $Q(\sqrt{5})$ の単数 $\varepsilon = (1+\sqrt{5})/2$ とし $\varepsilon' = (1-\sqrt{5})/2$ とし $q_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[\varepsilon^{n+1} - \varepsilon'^{n+1}]$ とおくと $q_n = q_{n-1} + q_{n-2}$ $(n \geqq 2)$，$\frac{0.97}{\sqrt{5}}\varepsilon^{n+1} \leqq q_n \leqq \frac{1.01}{\sqrt{5}}\varepsilon^{n+1}$ $(n > 3)$，

$q_{n-1}q_{n-m} > 0.36\,q_n$ $(n>3,\ 2 \leqq m \leqq n-1)$ 等を得る。これらの性質によって §3 の Λ_α に対して

$$\Lambda_\alpha < \frac{8.4\,\zeta(\alpha)\log q_n}{(0.36)^\alpha q_n^\alpha}$$

を得る。これから $n>3$ のとき

$$\sup_{f \in E_2^\alpha(C)} \left| \int_0^1\!\!\int_0^1 f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2 - \frac{1}{q_n}\sum_{k=1}^{q_n} f\left(\frac{k}{q_n}, \frac{q_{n-1}k}{q_n}\right) \right| <$$

$$< C\left(\frac{8.4\,\zeta(\alpha)\log q_n}{(0.36)^\alpha q_n^\alpha} + \frac{2^{\alpha+1}(2\zeta(\alpha+1))^2}{q_n^\alpha} \right)$$

をうる。これは§4の結果から見れば最良である。もし主項のみに注目すれば §3 の Бахвалов の結果から出る。

§6

実際に OPTIMAL な係数を求めること，近似計算のやり方，

補間法や重積分を単一積分で近似することなどへの応用，更にFREDHOLM型やVOLTERA型積分方程式等への応用などは次の参考文献[1]，[2]を参照されたい。上記はそれらの特に[1]の紹介であったが，文献は一切略したので[1]～[4]にゆずる。これらの方法（整数論的方法ともよばれる）は我が国では数学辞典などでも紹介されていなくて余り知られていないと思われるので紹介した次第である。新刊の[4]は重積分の近似計算についての最近の結果を知るには都合よくまとめられてあり文献も（数論愛好者には一寸不満かも知れないが）くわしく好著であろう。上記Korobovの結果は証明ぬきで要領よくまとめられてある。

参考文献

[1] 华罗庚，王元：数值积分及其应用
（科学出版社，1963，160ページ）

[2] N. M. KOROBOV: NUMBERTHEORETICAL METHODS IN APPROXIMATE ANALYSIS（ロシア語，FIZMATGIZ, MOSCOW，1963，224ページ.

[3] N. M. Korobov: SOME PROBLEMS IN THE THEORY OF DIOPHANTINE APPROXIMATION．英訳．Uspehi．1966．39ページ

[4]. A. H. STROUD: APPROXIMATE CALCULATION OF MULTIPLE INTEGRALS PRENTICE-HALL, USA. 1971, 431ページ.

§7

1973年4月28日 華羅庚教授は来日された機会に京大の数理解析研究所において「代数的数と数値計算への応用」と題されて §5 の FIBONACCI NUMBERS の代りに代数的単数を利用する方法について，即ち円の m 分体の $\frac{1}{2}\varphi(m)$ 次の実部分体（それは $\cos\frac{2\pi}{m}$ で生ずる）($m=p$ 素数) について論ぜられた。筆者は京大の方には出席出来ず東大に予定されてあった講演は取り止めになりお目に掛ることの出来なかったことは大変残念であったが，幸いに名大の中井講師の御好意により講演のメモを拝見することが出来，また一松教授との談話等によりここに追記する。

1973. 7. 27.